Schema der

KURVENDISKUSSION

für ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen

In der Literatur werden teilweise verschiedene Schemen angegeben. Das hier vorgestellte Schema ist also eine Möglichkeit unter anderen.

1. Definitionsmenge
2. Symmetrieeigenschaft
3. Definitionslücken *(nur bei gebrochenrationalen Funktionen)*
4. Nullstellen
5. Extremwerte
6. Wendepunkte
7. Zeichnung des Graphen

1. BESTIMMMUNG DER DEFINITIONSMENGE

• Bei ganzrationalen Funktionen (=Polynom) ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

♦ Bei gebrochenrationalen Funktionen ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ ohne Nullstellen im Nenner.

2. UNTERSUCHUNG DER SYMMETRIEEIGENSCHAFT

Achsensymmetrie (y-Achse), wenn $f(-x) = f(x)$

Punktsymmetrie (Ursprung), wenn $f(-x) = -f(x)$

• Bei ganzrationalen Funktionen:
- nur gerade Exponenten $\rightarrow$ Achsensymmetrie
- nur ungerade Exponenten $\rightarrow$ Punktsymmetrie
- gerade und ungerade Exponenten $\rightarrow$ keine Symmetrie

♦ Bei gebrochenrationalen Funktionen:
- nur gerade oder nur ungerade Exponenten im Zähler und Nenner
  $\rightarrow$ Achsensymmetrie
- im Zähler nur gerade und im Nenner nur ungerade (oder umgekehrt)
  $\rightarrow$ Punktsymmetrie

3. DEFINITIONSLÜCKEN

♦ Gebrochenrationale Funktionen können Definitionslücken haben.

Ist $f(x)$ an der Stelle x_0 nicht definiert und gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \neq -\infty \text{ oder } \infty$$

dann hat diese Funktion an der Stelle x_0 eine hebbare Definitionslücke.

Streben die Funktionswerte $f(x)$ in der Umgebung von x_0 gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$, dann wird x_0 als Pol bezeichnet.

Zur Bestimmung des Grenzwertes können die Regel von l'Hospital oder die Faktorzerlegung angewandt werden.

4. Ermittlung der Nullstellen (x_0)

Funktionen n-ten Grades besitzen höchstens n Nullstellen.
Lösungsverfahren:
- Nullsetzung der Funktion $f(x) = 0$
- Herausfinden einer Lösung durch Probieren
- Polynomdivision
- wenn der Term die zweite Potenz hat, dann Anwendung des allgemeinen Lösungsverfahrens (p-q-Formel).

Im Falle höherer Potenzen ist auch an die Erleichterung mittels Substitution zu denken.

• Bei ganzrationalen Funktionen gilt:
ist n ungerade $\rightarrow$ mindestens 1 Nullstelle
ist n gerade $\rightarrow$ evtl. keine Nullstelle

⧫ Bei gebrochenrationalen Funktionen genügt es die Nullstellen im Zähler zu berechnen.

Zur vollständigen Angabe der Nullstellen berechnet man den zugehörigen y-Wert, d.h. man berechnet $f(x_0)$.

5.Ermittlung der Extremwerte

- Bildung der ersten Ableitung $f'(x)$
- Berechung der Nullstellen der Ableitungsfunktion ($f'(x) = 0$)

Prüfung, ob Tief- oder Hochpunkte vorliegen:

Notwendige Bedingung (=Bedingung 1. Ordnung)
$f'(x_0) = 0$

Hinreichende Bedingung (=Bedingung 2. Ordnung)
- Bildung der zweiten Ableitung $f''(x)$
- Einsetzen der Nullstellenwerte (=Extremstellen) der ersten Ableitungsfunktion in die zweite Ableitungsfunktion:

$f''(x_0) < 0 \quad \rightarrow$ Hochpunkt (= lokales Maximum)
$f''(x_0) > 0 \quad \rightarrow$ Tiefpunkt (= lokales Minimum)
$f''(x_0) = 0$, dann siehe 6. Wendepunkt

Zur vollständigen Angabe der Extremwerte berechnet man die zugehörigen y-Werte, d.h. man setzt die gefundenen x-Werte in $f(x)$ ein.

6. Bestimmung der Wendepunkte

Ein Wendepunkt kennzeichnet den Krümmungswechsel der Funktion f(x).

Notwendige Bedingung (=Bedingung 1. Ordnung)

$f''(x_0) = 0$

Hinreichende Bedingung (=Bedingung 2. Ordnung)

$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Um Festzustellen, ob eine Funktion die Bedingung erfüllt, setzt man die zweite Ableitung gleich Null und löst sie auf.
Die so gefundenen Nullstellen werden in die dritte Ableitung eingesetzt. Ist die dritte Ableitung ungleich Null so handelt es sich um einen Wendepunkt.

Zur vollständigen Angabe der Wendepunkte berechnet man die zugehörigen y-Werte, d.h. man setzt die gefundenen x-Werte in $f(x)$ ein.